Rolf Steyer

# Statistik und Kausalität (1 von 100)

6. Tagung "Methoden und Evaluation"
18. bis 20. September 2003 in Wien

Universität Jena
metheval
lehrstuhl für methodenlehre und evaluationsforschung

## Abstract

Obwohl die Zahl und die Qualität der Arbeiten über Kausalität in der statistischen Fachliteratur in den letzten Jahrzehnten deutlich zugenommen haben, herrscht wohl doch noch die Meinung vor, dass Kausalität eher ein Thema für Philosophen als für Statistiker ist. Konsequenterweise kommt auch in der mathematischen Darstellung statistischer Modelle, etwa des Allgemeinen Linearen Modells, Kausalität nicht vor. Auch wenn dies natürlich gewisse Vorteile hat, die vor allem in der Einfachheit der Darstellung liegen, kauft man sich damit gravierende Probleme ein. Ohne die Berücksichtigung der Kausalitätsproblematik sind statistische Ergebnisse und Schlüsse für viele, wenn nicht die meisten Anwendung nahezu irrelevant.

Ein weiterer Punkt ist: Mit der Kausalität werden in den Modellen auch die *Individuen* ignoriert, für deren Behandlung Mediziner, Psychologen, Erziehungswissenschaftler etc. aber kausales Wissen, d. h. Wissen über die Effekte ihrer Maßnahmen. Auch wenn Aussagen über individuelle Effekte zuviel verlangt erscheinen, brauchen solche Anwender doch wenigstens Wissen über durchschnittliche Effekte und die Varianz der individuellen Effekte. Selbst darüber kann ein statistisches Modell, das nicht auch die Kausalitätsproblematik in seiner Formalisierung berücksichtigt, keine Auskunft geben. Bei näherem Hinsehen erweist sich das Kausalitätsproblem als eine Frage des adäquaten Stichprobenmodells, in dem die Heterogenität der Individuen oder Beobachtungseinheiten und die Art und Weise, wie die Stichprobe gezogen wird, berücksichtigt sind.

**Das Allgemeine Lineare Modell**

Die Modellannahmen: (1) $\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\,\mathbf{ß} + \boldsymbol{e}$

(2) $\mathbf{E}(\boldsymbol{y}) = \mathbf{X}\,\mathbf{ß}$

(3) $\mathbf{S}_{ee} = s^2\,\mathbf{I}$

Die Zeilen im Vektor ***y*** beziehen sich *nicht* auf Personen, sondern auf die *i*-te zu erhebende Beobachtung. Mit diesen Annahmen werden *keine* Annahmen über die Homogenität der Personen gemacht.

Mit der Schätzung von **E**(***y***) werden Erwartungswerte geschätzt, die *verfälscht* sein können.

Universität Jena
metheval
lehrstuhl für methodenlehre und evaluationsforschung

## Expected outcomes and individual distributions

**Table 1.** *Individual causal effects and treatment probabilities.*

| Person variable $U$ | $E(Y \mid X = 1, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 0, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 1, U = u) - E(Y \mid X = 0, U = u)$ Individual causal effect |
|---|---|---|---|
| $u_1$ | 82 | 68 | 14 |
| $u_2$ | 89 | 81 | 8 |
| $u_3$ | 101 | 89 | 12 |
| $u_4$ | 108 | 102 | 6 |
| $u_5$ | 118 | 112 | 6 |
| $u_6$ | 131 | 119 | 12 |
| $u_7$ | 139 | 131 | 8 |
| $u_8$ | 152 | 138 | 14 |

Individual causal laws

# Individual and average causal effects

**Tab le 1.** *Individual and average causal effects.*

| Person variable $U$ | $P(U{=}u)$ sampling probability | $E(Y \mid X = 1, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 0, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 1, U = u) - E(Y \mid X = 0, U = u)$ Individual causal effect |
|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 1/8 | 82 | 68 | 14 |
| $u_2$ | 1/8 | 89 | 81 | 8 |
| $u_3$ | 1/8 | 101 | 89 | 12 |
| $u_4$ | 1/8 | 108 | 102 | 6 |
| $u_5$ | 1/8 | 118 | 112 | 6 |
| $u_6$ | 1/8 | 131 | 119 | 12 |
| $u_7$ | 1/8 | 139 | 131 | 8 |
| $u_8$ | 1/8 | 152 | 138 | 14 |

Individual causal laws

Average causal laws:

$CUE(Y \mid X = x) = \sum_u E(Y \mid X = x, U = u) \cdot P(U = u)$

Universität Jena
metheval
lehrstuhl für methodenlehre und evaluationsforschung

# Randomization

**Table 1.** *Individual causal effects and equal treatment probabilities.*

| Person variable $U$ | $P(U{=}u)$ sampling probability | $E(Y \mid X = 1, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 0, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 1, U = u) - E(Y \mid X = 0, U = u)$ Individual causal effect | $P(X = 1 \mid U{=}u)$ treatment probability in experiment 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 1/8 | 82 | 68 | 14 | 1/2 |
| $u_2$ | 1/8 | 89 | 81 | 8 | 1/2 |
| $u_3$ | 1/8 | 101 | 89 | 12 | 1/2 |
| $u_4$ | 1/8 | 108 | 102 | 6 | 1/2 |
| $u_5$ | 1/8 | 118 | 112 | 6 | 1/2 |
| $u_6$ | 1/8 | 131 | 119 | 12 | 1/2 |
| $u_7$ | 1/8 | 139 | 131 | 8 | 1/2 |
| $u_8$ | 1/8 | 152 | 138 | 14 | 1/2 |

Individual causal laws

Good design

Average causal laws:

$CUE(Y \mid X = x) = \sum_u E(Y \mid X = x, U = u) \cdot P(U = u)$

Good design implies: $E(Y \mid X = x)$ reflect average causal laws

# CUE and E(Y | X = x)

**Table 1.** *Individual causal effects, equal and unequal treatment probabilities.*

$$E(Y \mid X = x) := \sum_u E(Y \mid X = x,\ U = u) \cdot P(U = u \mid X = x)$$

| Person | $P(U=u)$ sampling probability | $E(Y \mid X = 1, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 0, U = u)$ Expected outcome | $E(Y \mid X = 1, U = u) - E(Y \mid X = 0, U = u)$ Individual causal effec | $P(X = 1 \mid U = u)$ treatment probability in experiment 1 | $P(X = 1 \mid U = u)$ treatment probability in experiment 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | 1/8 | 82 | 68 | 14 | 1/2 | 8/9 |
| $u_2$ | 1/8 | 89 | 81 | 8 | 1/2 | 7/9 |
| $u_3$ | 1/8 | 101 | 89 | 12 | 1/2 | 6/9 |
| $u_4$ | 1/8 | 108 | 102 | 6 | 1/2 | 5/9 |
| $u_5$ | 1/8 | 118 | 112 | 6 | 1/2 | 4/9 |
| $u_6$ | 1/8 | 131 | 119 | 12 | 1/2 | 3/9 |
| $u_7$ | 1/8 | 139 | 131 | 8 | 1/2 | 2/9 |
| $u_8$ | 1/8 | 152 | 138 | 14 | 1/2 | 1/9 |
| | | Individual causal laws | | | Good design | Bad design |

Average causal laws:

$$CUE(Y \mid X = x) = \sum_u E(Y \mid X = x, U = u) \cdot P(U = u)$$

Good design implies: $E(Y \mid X = x)$ reflect average causal laws

Bad design implies: $E(Y \mid X = x)$ do not reflect average causal laws

Universität Jena
metheval
lehrstuhl für methodenlehre
und evaluationsforschung

Wir betrachten den folgenden Single-unit trial: Ziehe eine Beobachtungseinheit (Person) aus einer Menge von solchen Einheiten (der Population), beobachte eine Kovariate $Z$ (eine Pre-treatment-Variable), beobachte (oder entscheide) die Zuweisung der Einheit zu einer von zwei experimentellen Bedingungen und registriere den Wert der Outcome-Variablen.

Frage:

Was sind individuelle und (bedingte) durchschnittliche kausale Effekte (gegeben ein Wert $z$ einer Kovariaten $Z$) ?

*Notation:*
$U$: Person oder Unit-Variable
$Z$: Kovariate
$X$: Treatment-Variable, dichotom mit Werten 0 und 1
$Y$: Outcome-Variable

Unter den oben genannten Voraussetzungen existieren zwei Funktionen $f_0(U)$, $f_1(U)$ von $U$ und zwei Funktionen $g_0(Z)$ und $g_1(Z)$ von $Z$, für die gelten:

$$E(Y \mid X, U) = f_0(U) + f_1(U) \cdot X \qquad (0.1)$$
$$E(Y \mid X, Z) = g_0(Z) + g_1(Z) \cdot X, \qquad (0.2)$$

wobei $f_0(U)$ und $f_1(U)$ of $U$, sowie $g_0(Z)$ und $g_1(Z)$ unbekannte Funktionen von $U$ bzw. $Z$. sind.

$f_1(u)$ =: Individueller kausaler Effekt von $u$

$E[f_1(U)]$ =: Durchschnittlicher kausaler Effekt

$E[f_1(U) \mid Z = z]$ =: Bedingter durchschnittlicher kausaler Effekt von $X$ auf $Y$ gegeben der Wert $z$ der Kovariaten $Z$.



Die folgenden Gleichungen sind immer wahr, wenn $X$ dichotom ist:

$$E(Y \mid X, Z) = E[E(Y \mid X, U) \mid X, Z] \qquad (0.1)$$
$$= E[f_0(U) \mid X, Z] + E[f_1(U) \mid X, Z] \cdot X.$$

Wenn wir die beiden Annahmen

$$E[f_0(U) \mid X, Z] = E[f_0(U) \mid Z] \qquad (0.2)$$
$$E[f_1(U) \mid X, Z] = E[f_1(U) \mid Z] \qquad (0.3)$$

machen und $g_0(Z) := E[f_0(U) \mid Z]$ sowie $g_1(Z) := E[f_1(U) \mid Z]$ definieren, dann zeigen diese Gleichungen, dass die Steigungen $g_1(z)$ der bedingten linearen Regression $E(Y \mid X, Z) = g_0(Z) + g_1(Z) \cdot X$ die bedingten durchschnittlichen kausalen Effekte von $X$ auf $Y$ gegeben $Z = z$ sind:

Hinreichende Bedingungen für (0.2) und (0.3) sind:

(a) Bedingte Unabhängigkeit von $U$ und $X$ gegeben $Z$.
(b) Bedingte Unabhängigkeit von $X$ und $(Y_0, Y_1)$ gegeben $Z$, (= Rubins Ignorability), wobei $Y_0 := f_0(U)$ und $Y_1 := f_0(U) + f_1(U)$
(c) Bedingte Unkonfundiertheit (s. Steyer et al. 2000, MPR-online)

Frage:
Vorausgesetzt, dass die bedingte lineare Regression

$$E(Y \mid X, Z) = g_0(Z) + g_1(Z) \cdot X, \qquad (0.1)$$

von $Y$ auf $X$ gegeben $Z$ kausal unverfälscht ist, wie kann man dann den durchschnittlichen kausalen Effekt von $X$ auf $Y$ berechnen?

**Theorem.** Wenn

(a) $E[\,f_0 U) \mid X, Z\,] = E[\,f_0 U) \mid Z\,]$
(b) $E[\,f_1(U) \mid X, Z\,] = E[\,f_1(U) \mid Z\,]$

und

(c) $E(Y \mid X, U, Z) = E(Y \mid X, U)$,

dann

$E[g_1(Z)] = E[\,f_1(U)\,]$ = Durchschnittlicher kausaler Effekt.

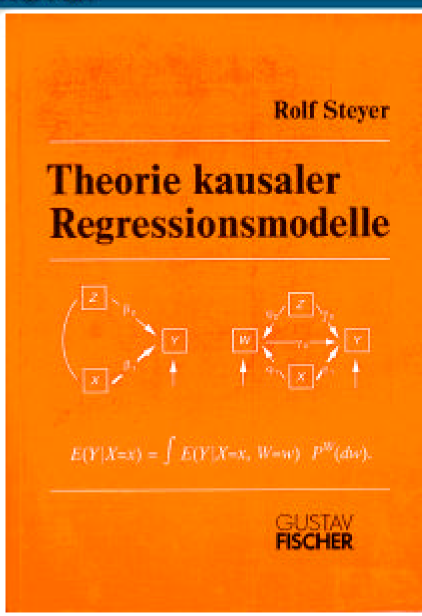


# Zusammenfassung

- Ohne Kausalität prüfen wir ziemlich unsinnige Hypothesen
- Statistische Modelle, sollten daher die Personen und deren Heterogenität explizit mit einschließen
- Auch Hierarchische Lineare Modelle sind nur unter bestimmten Kausalitätsbedingungen vernünftig interpretierbar.

## Ende (von 1 von 100)

Universität Jena
metheval
lehrstuhl für methodenlehre und evaluationsforschung



## Ende (von 1 von 100)

**Acrobat-Dokument**



TRENDS IN MATHEMATICAL PSYCHOLOGY
E. Degreef and J. Van Buggenhaut (editors)



CAUSAL LINEAR STOCHASTIC DEPENDENCIES: THE FORMAL THEORY

Rolf Steyer
University of Trier
Trier, Federal Republic of Germany

The formal background of the theory of causal linear stochastic dependence is provided, which was introduced by Steyer (1984). The theory presented is concerned with those kinds of dependencies which can be described by specifying the functional form of a conditional expectation $E(Y|X)$. This includes also those situations in which $X$ is a multidimensional random variable. The main concepts of the theory are causal and weak causal linear stochastic dependencies, the definition of which is based on the pre- and equiorderedness relations of sigma-fields and stochastic variables, on the notion of potential

# References

Steyer, R. (1992). *Theorie kausaler Regressionsmodelle*. Stuttgart: Gustav Fischer Verlag. Jetzt verfügbar über Verlag Lucius & Lucius, Stuttgart.

Steyer, R. (2003). Wahrscheinlichkeit und Regression. Berlin: Springer. Kap 15-17.

Steyer, R., Gabler, S., von Davier, A., Nachtigall, C. & Buhl, T. (2000a) Causal regression models I: individual and average causal effects. *Methods of Psychological Research-Online*, *5*, 2, 39-71. (http://www.mpr-online.de)

Steyer, R., Gabler, S., von Davier, A. & Nachtigall, C. (2000b) Causal regression models II: unconfoundedness and causal unbiasedness. *Methods of Psychological Research-Online*, *5*, 3, 55-86. (http://www.mpr-online.de)

Steyer, R., Nachtigall, C., Wüthrich-Martone, O. & Kraus, K. (2002). Causal regression models III: covariates, conditional and unconditional average causal effects. *Methods of Psychological Research*-Online, *7*, 1, 41-68. (http://www.mpr-online.de)

Steyer, R. (1984). Causal Linear Stochastic Dependencies: The Formal Theory. In E. Degreef und J. van Buggenhaut (Eds.), *Trends in Mathematical Psychology* (pp. 317-346). Amsterdam: North Holland. Can be downloaded from http://www2.uni-jena.de/svw/metheval/publikationen.php